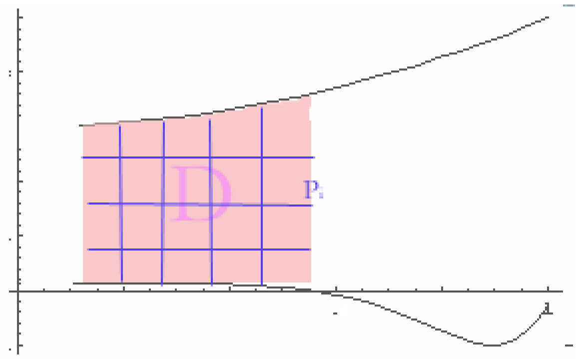
Integrabilità delle funzioni continue : *Integrale doppio*

Sia D un dominio normale del piano ed f una funzione , a più variabili, continua in D; e sia P una partizione di D in domini normali (D_1,D_2, D_3,………D_n).

N.B. Essendo f una funzione continua in un dominio normale (compatto e limitato) per il teorema di Wairstrass essa è dotata di massimo e di minimo in ogni domini D_i, anche essi chiusi e limitati.



Consideriamo le somme così formate:

s(P)= mis(D_1) $\min_{f(D_1)}$ +mis(D_2) $\min_{f(D_2)}$+…….+ mis(D_n) $\min_{f(D_n)}$ *(somme integrali inferiori)*

e

S(P)= mis(D_1) $\max_{f(D_1)}$ +mis(D_2) $\max_{(D_2)}$+…….+ mis(D_n) $\max_{f(D_n)}$ *(somme integrali superiori)*

Segue dalla definizione di somme che:

$s(P) \leq S(P)$

Se consideriamo alter partizioni di D e consideriamo l'insieme numerico costituito dalle somme inferiori e quello delle somme superiori che variano al variare delle partizioni:

$\{s(P_i)\}_{i \in N}$ e $\{S(P_i)\}_{i \in N}$ si ha $s(P_i) \leq S(P_i)$.

I due insiemi, $\{s(P_i)\}_{i \in N}$ e $\{S(P_i)\}_{i \in N}$,sono separati. Si dimostra che essi sono anche contigui, cioè ammettono un unico elemento di separazione: in altri temini esiste un numero reale ***c*** tale che:

$s(P_i) \leq \boldsymbol{c} \leq S(P_i)$.

E tale numero ***c,*** <u>si dimostra</u>, rappresenta proprio : $\iint_D f(x;y)dxdy$

Come per gli integrali di una funzione di una variabile, anche per gli integrali doppi valgono:

- proprietà di linearità:

$$\iint_D \alpha(f(x;y)) + \beta(g(x;y))dxdy = \alpha\iint_D f(x;y)dxdy + \beta\iint_D g(x;y)dxdy$$

- di monotonia:

  se *f(x;y) ≤g(x ;y) ∀(x,y),* allora : $\iint_D f(x;y)dxdy \leq \iint_D g(x;y)dxdy$

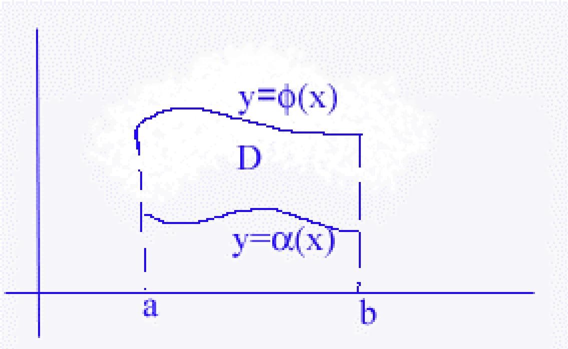
- se D_1,D_2, D_3,………D_n è una partizione di D, tutti domini normali, allora:

$$\iint_D f(x;y)dxdy = \iint_{D_1} f(x;y)dxdy + \iint_{D_{21}} f(x;y)dxdy + ... + \iint_{D_n} f(x;y)dxdy$$

Se la funzione f(x;y) è non negativa al variare di (x;y)inD, l'integrale doppio esteso a D rappresenta il volume del solido dello spazio R^3, delimitato dall'insieme D del piano xOy, dal grafico di f(x;y).

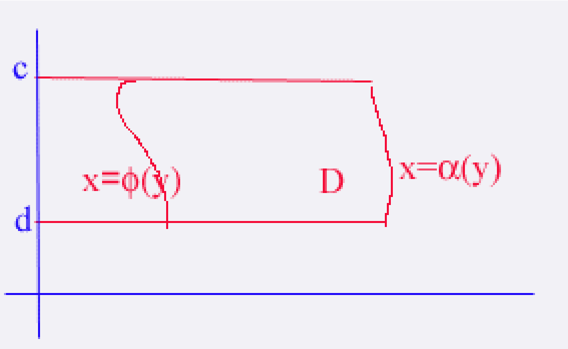
Calcolo degli integrali doppi: form*ule di riduzione.*

Per i domini normali rispetto all'asse x, $D=\{ (x,y) /\ a \le x \le b\ ,\ \alpha(x) \le y \le \phi(x) \}$:



$$\iint_D f(x;y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\phi(x)} f(x;y)dy$$

Per i domini normali rispetto all'asse y, $D=\{ (x,y) /\ d \le y \le c\ ,\ \phi(y) \le x \le \alpha(y) \}$:



$$\iint_D f(x;y)dxdy = \int_d^c dy \int_{\phi(y)}^{\alpha(y)} f(x;y)dx$$

In alcuni casi sarà utile passare alle coordinate polari:

$x = \rho cos\theta$

$y = \rho sen\theta$

$$\iint_D f(x;y)dxdy = \iint_D \rho \cdot f(\rho\cos\vartheta; \rho sen\vartheta)d\rho d\vartheta.$$